

11. Hausübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(abzugeben am Freitag, 21.01.2011)

Aufgabe H21 Zwei harmonisch gebundene Teilchen (5 Punkte)

Zwei Teilchen (X_1, P_1) und (X_2, P_2) von gleicher Masse m sind in einer harmonischen Falle, $V(x) = \frac{m}{2} \omega^2 x^2$, gebunden. Eines der Teilchen befinde sich im Grundzustand $|0\rangle$, das andere im ersten angeregten Zustand $|1\rangle$ dieses harmonischen Oszillators. Berechnen Sie die Varianz ihres Abstands, $\langle \psi | (X_1 - X_2)^2 | \psi \rangle$, für den entsprechenden Zwei-Teilchen-Zustand $|\psi\rangle$ im Fall von (a) unterscheidbaren Teilchen (b) identischen Bosonen und (c) identischen Fermionen.

Erinnerung: $X = \sqrt{\hbar/m\omega} \tilde{X} \Rightarrow \langle \ell | A(X) | n \rangle = \sqrt{\hbar/m\omega} \int d\tilde{x} \langle \ell | \tilde{x} \rangle \tilde{A}(\tilde{x}) \langle \tilde{x} | n \rangle$;
 $\langle \tilde{x} | 0 \rangle = \sqrt[4]{m\omega/\hbar\pi} e^{-\tilde{x}^2/2}$ und $\langle \tilde{x} | 1 \rangle = \sqrt[4]{m\omega/\hbar\pi} \sqrt{2} \tilde{x} e^{-\tilde{x}^2/2}$.

Aufgabe H22 Die CHSH-Ungleichung (5 Punkte)

Leiten Sie eine zur Bell-Ungleichung analoge Ungleichung für vier mögliche Messrichtungen her, die sogenannte CHSH-Ungleichung (nach Clauser, Horne, Shimony und Holt): Gegeben seien Observable A, B, C, D , deren Messwerte a, b, c, d jeweils $+1$ oder -1 sein können.

a) Zeigen Sie, dass bei gleichzeitigem Vorliegen der vier Messwerte stets gilt

$$(a + c)b - (a - c)d = \pm 2$$

und daher für die Erwartungswerte der Observablen die CHSH-Ungleichung

$$|\langle AB \rangle + \langle BC \rangle + \langle CD \rangle - \langle DA \rangle| \leq 2.$$

b) Die Observablen von Beobachter 1 seien $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}_1$ und $C = \vec{\gamma} \cdot \vec{\sigma}_1$ (Spinmessung in Richtung der Einheitsvektoren $\vec{\alpha}$ bzw. $\vec{\gamma}$); für Beobachter 2 lauten die entsprechenden Observablen B und D (Spinmessung in Richtung $\vec{\beta}$ bzw. $\vec{\delta}$). Der Einfachheit halber sollen alle Vektoren in einer Ebene liegen.

Formulieren Sie die CHSH-Ungleichung für den Singlettzustand

$$|\text{sing}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \},$$

indem Sie ihre linke Seite durch die Winkel zwischen $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ und $\vec{\delta}$ ausdrücken. Überlegen Sie sich Winkel, bei denen die Ungleichung verletzt wird. Nennen Sie den physikalischen Grund für die Verletzung.

Erinnerung: $\langle \text{sing} | AB | \text{sing} \rangle = -\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ etc.

c) Zeigen Sie, dass eine lineare Korrelation $\langle AB \rangle = 1 - \frac{2}{\pi} \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ die Ungleichung erfüllt.

*Dies war die letzte Hausübung zu dieser Vorlesung ☺
Danke für's Mitmachen und viel Erfolg bei der Klausur!*